



مدل سازی اثرات تغییرات دما و رطوبت بتن در سنین اولیه آن با استفاده از روش اجزاء محدود

بهروز تقفی، دانشجوی دکتری مهندسی راه دانشگاه لیورپول ودانش آموخته دانشکده فنی دانشگاه تبریز
بهزاد تقفی، کارشناس مهندسی مکانیک از دانشگاه آزاد تاجکستان

چکیده

دما و رطوبت بتن در سنین اولیه آن تاثیر قابل توجهی روی افزایش مقاومت بتن دارد. تغییرات دما و رطوبت به کرنش های حرارتی و جمع شدگی در بتن منجر می شود. مدت های مدید از یک آزمایش غیرمخرب استاندارد به نام روش اندازه گیری بلوغ بتن براساس دما برای ارزیابی مقاومت بتن در شرایط میدانی استفاده می شود. در راستای تکامل این روش، تحقیقات زیادی صورت گرفت و مشخص شد که مکانیزم افزایش مقاومت بتن به شدت به میزان رطوبت بتن در طول گیرش آن نیز بستگی دارد. مغزه گیری هایی که توسط محققان از اعماق مختلف روسازی بتنی گرفته شده است، نشان داده اند که رطوبت بتن در عمق آن با نظم خاصی تغییر می کند و تقریباً به همان ترتیب مقاومت های متفاوتی نیز از مغزه گیری ها حاصل شد. این مطلب به خوبی میزان تاثیر رطوبت بر مقدار افزایش مقاومت بتن را بیان می کند. بنابراین به نظر می رسد که به دست آوردن اطلاعات و در دست داشتن شناخت کامل از میزان رطوبت و دمای بتن در سنین اولیه آن کمک شایانی در پیش بینی هر چه دقیق تر مقاومت بتن در محل انجام پروژه و تعیین خصوصیات مکانیکی بتن براساس کرنش داخلی خواهد نمود.

کلمات کلیدی: روسازی، بتن، سنین اولیه، دما، رطوبت، روش اجزای محدود.

۱- مقدمه

امروزه مدل های مکانیستی که نشان دهنده رفتار بتن در محل انجام پروژه می باشد به شدت در حال رواج و گسترش هستند. در این مقاله تلاش خواهیم کرد جدیدترین مدل های مربوط به انتقال رطوبت و حرارت بتن را در سنین اولیه آن، مورد بررسی قرار دهیم. تحقیقات نشان داده اند انتقال حرارت و پخش شدن رطوبت بتن تابعی از دما، رطوبت بتن و درجه هیدراتاسیون آن می باشد که ماهیت این تابع باعث می شود تحلیل دما و رطوبت حالت غیر خطی به خود گرفته و نتوان این دو پارامتر را در تحلیل رفتار بتن دور از هم نگاه داشت. از طرفی از آنجا که مقدار بسیار زیادی از تغییرات دما و رطوبت در راستای عمودی صورت می گیرد، می توان برای ساده تر شدن مطلب آن را به یک مسأله یک بعدی تبدیل نمود. یکی از مشکلات محققان و مهندسان برای تحقیق در این زمینه نبود یک فرمول یا مدل ابتدایی برای شروع کارهای تحقیقاتی است؛ مدلی که با در نظر گرفتن پارامترهای کامل و لازم، و بدون اغماض از در نظرگیری پارامترهای مؤثر، به عنوان پایه ای برای شناخت رفتار بتن در اثر تغییرات دما و رطوبت به کار رود. هدف این مقاله فرمول بندی این مسأله با استفاده از روش اجزای محدود و ارائه مدل های اولیه برای بررسی رفتار بتن به واسطه تغییرات دما و رطوبت در طی فرآیند هیدراتاسیون بتن است. لذا پس از یک زمینه سازی مناسب، به صورت خلاصه به استخراج مدل های پایه پرداخته خواهد شد.

۲- نظریه ای جامع به مشخصات روند افزایش سن بتن

مقاومت بتن تابعی است از سن و روند تغییرات دما است و به نظر می رسد به احتمال بسیار زیاد تابعی از روند تغییرات رطوبت بتن نیز باشد [1, 2]. روشی که در آن تخمین میزان افزایش مقاومت بتن براساس روند تغییرات دما صورت می پذیرد، روش بلوغ نام دارد. «سن معادل» یک مفهوم بسیار مهم است که می توان آن را توسط معادله (۱) توصیف کرد.

$$t_e = \int_0^t \beta_T \beta_{RH} dt \quad (1)$$

که در معادله فوق β_T و β_{RH} ضرایب وزنی هستند که به ترتیب با توجه به دمای بتن و میزان رطوبت آن تعیین می شوند. معادله شماره (۲) یکی از چندین معادله ای است که مقدار β_T را نتیجه می دهد. این معادله توسط فریسلبن هانسن^۱ و پدرسون^۲ و براساس معادله معروف آرینیوس^۳ معرفی گردید.

$$\beta_T = \exp\left(-\frac{E}{R}\left(\frac{1}{273+T} - \frac{1}{273+T_r}\right)\right) \quad (2)$$

T: دمای بتن، برحسب °C

Tr: دمای مرجع محاسبات، برحسب °C

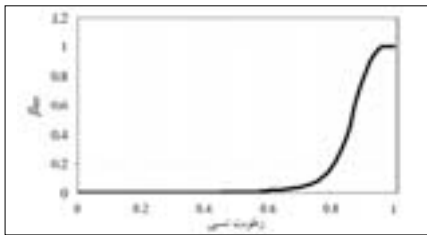
E: انرژی اکتیواسیون (فعال سازی)، برحسب J/mol

R: ثابت جهانی گازها برابر با ۸/۳۱۴۴ J/(mol K)

β_{RH} نیز بنا به پیشنهاد بازانت^۵ در سال ۱۹۷۰ به صورت زیر می باشد [1]:

$$\beta_{RH} = \frac{1}{1 + (7/5 - 7/5 RH)^4} \quad (3)$$

که RH میزان رطوبت نسبی بتن می باشد. نمودار تغییرات β_{RH} در مقابل RH در شکل (۱) قابل مشاهده است.



شکل (۱): نمودار تغییرات β_{RH} در مقابل RH

درجه هیدراتاسیون سیمان (α) را می توان به چند طریق بیان نمود: نسبت مقاومت لحظه ای بتن به مقاومت نهایی، میزان سیمان هیدراته شده به کل سیمان به کار رفته در بتن، حرارت تولید شده به کل حرارت و غیره. درجه هیدراتاسیون را می توان با معادله ای مانند معادله (۴) توصیف کرد.

$$\alpha(t_e) = \alpha_{\infty} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\tau}{t_e}\right)^{\beta}\right) \quad (4)$$

α_{∞} : درجه نهایی هیدراتاسیون

τ : پارامتر زمان هیدراتاسیون، برحسب ساعت، و

β : پارامتر نحوه هیدراتاسیون.

مقادیر پارامترهای فوق را می توان براساس داده های طرح اختلاط بتن مشخص کرد. از آنجایی که نرخ حرارت تولید شده و نرخ خشک شدن بتن به مشتق درجه هیدراتاسیون نسبت به زمان وابسته است، این مشتق در معادله (۵) برای استفاده در ادامه مقاله ارائه شده است.

این مشتق در معادله (۵) برای استفاده در ادامه مقاله ارائه شده است.

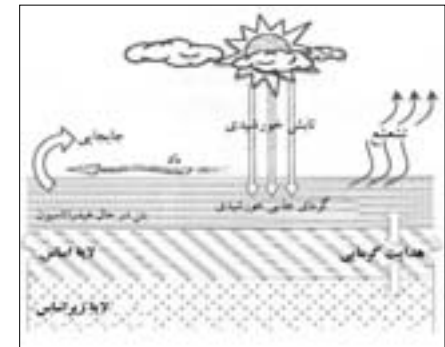
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{(\tau/t_e)^{\beta} \beta_T \beta_{RH} \alpha}{t_e} \quad (5)$$

۳- دمای بتن

در صورتی که بتن ریزی تازه انجام شده باشد، اصولاً دمای بتن تحت تأثیر شرایط آب و هوایی محیط اطراف آن و میزان هدایت گرمایی بتن خواهد بود. فرآیند هیدراتاسیون نیز به این دو عامل مؤثر



در دمای بتن نیز اضافه می‌گردد. شکل (۲) عوامل مؤثر در میزان دمای بتن را نمایش می‌دهد.



شکل (۲): مکانیزم انتقال حرارت میان روسازی و محیط پیرامون آن [3].

۳-۱- معادلات حاکم بر مسأله

با توجه به پایستاری انرژی، معادله حاکم برای انتقال حرارت داخل بتن این گونه فرمول‌بندی می‌شود:

$$\text{div} \cdot (K \cdot \text{grad}(T)) + Q = \rho c T \quad (6)$$

K: ضریب هدایت گرمایی،

Q: نرخ حرارت تولید شده به واسطه هیدراتاسیون،

p: چگالی بتن، و

c: گرمای ویژه.

بنا به تعریف درجه هیدراتاسیون، حرارت هیدراتاسیون را می‌توان از معادله (۷) به دست آورد.

$$H = H_{II} \cdot \alpha(t_e) \quad (7)$$

که H_{II} تمام گرمایی است که می‌تواند تولید شود و گرمای تولید شده است. برای محاسبه نرخ حرارت تولیدی، از معادله (۷) نسبت به زمان مشتق درجه اول می‌گیریم. لذا نرخ گرمای تولید شده مطابق فرمول شماره (۸) خواهد بود:

$$Q = \frac{dH}{dt} = H_{II} \cdot \frac{(\tau/t_e)^\beta \beta_T B_{RH} \alpha}{t_e} \quad (8)$$

۳-۲- شرایط مرزی

۳-۲-۱- انتقال حرارت جابه جایی

انرژی حرارتی از سطح دال به محیط پیرامون آن، توسط جریان ذرات سیال منتقل می‌شود. در واقع انتقال حرارت به وسیله حرکت تصادفی مولکول‌ها در سیال ممکن می‌گردد. به عبارت دیگر، انتقال

حرارت جابه جایی^۶ در شرایطی رخ خواهد داد که دمای جریان باد و دمای سطح دال بتنی با هم متفاوت باشند. در صورتی که دمای سطح دال و جریان باد تفاوت کند، دمای جریانی که از روی سطح دال بتنی عبور می‌کند از مقدار T_s درست در نزدیکی دال بتنی تا مقدار T_a در نقاطی بالاتر از سطح دال بتنی تغییر خواهد کرد. انتقال حرارت جابه جایی به صورت رابطه زیر بیان می‌شود: [4, 5]

$$q_{conv}'' = h_c (T_s - T_a) \quad (9)$$

که q_{conv}'' برحسب W/m2 شار حرارت جابه جابه شده و h_c یا بعد W/m2/K ضریب انتقال حرارت جابه جایی است. ضریب انتقال حرارت جابه جایی به علت وجود متغیرهای متعددی که در آن مؤثرند به سختی تعیین می‌شود.

قبلاً یک رابطه تجربی پیشنهاد شده است که ضریب انتقال حرارت جابه جایی را به سرعت باد و زبری سطح دال بتنی ربط می‌دهد [6]:

$$h_c = 6.34 \cdot v \quad (10)$$

که $6 \text{ W/m}^2/\text{K}$ نمایانگر متوسط زبری سطح دال بتنی بدون در نظرگیری تأثیر باد است. مطابق رابطه (۱۰) ضریب انتقال حرارت به نسبت ازدیاد سرعت باد، افزایش می‌یابد.

۳-۲-۲- تابش اشعه حرارتی

بر خلاف روش‌های انتقال حرارت رسانش (هدایت گرمایی) و جابه جایی، انتقال انرژی حرارتی در روش تابش اشعه توسط امواج الکترومغناطیس و بدون نیاز به هیچ ماده واسطه‌ای صورت می‌پذیرد. توان تشعشع E نشان‌دهنده شدت انرژی حرارتی منتشر شده از واحد سطح دال بتنی توسط تابش می‌باشد. حد بالای توان تشعشع توسط رابطه زیر به دست می‌آید [7]:

$$E = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (11)$$

که E بر حسب W/m2 بوده و T_s دمای مطلق، بر حسب کلوین، در سطح دال بتنی است. σ نیز برابر 5.67×10^{-8} و همان ثابت استفان-بولتزمن^۷ می‌باشد. پارامتر ε ضریب تشعشع است که از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند و در واقع عبارت است از خاصیت تابشی سطح دال و به عنوان معیاری برای سنجش میزان توانایی تشعشع انرژی توسط سطح دال نسبت به یک جسم کاملاً مشکی (جسم معیار) به کار می‌رود. میزان تابش برای یک روسازی بتنی بر این اصل تعیین می‌شود که سطح یک دال بتنی با دمای T_s به یک سطح بسیار وسیع‌تر در پیرامون دال با دمای T_a می‌تابد و انتقال حرارت تابشی را می‌توان توسط رابطه (۱۲) بیان نمود [8, 9]:

$$q_s'' = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_a^4) \quad (12)$$

۳-۲-۳- تشعشع خورشیدی

تشعشعات خورشیدی^۸ q_s که مستقیماً توسط سطح دال بتنی جذب می‌شوند، سبب گرم شدن بسیار سریع‌تر سطح دال بتنی نسبت به ناحیه داخلی دال می‌شوند که این اثر به ایجاد گرادیان حرارتی در راستای عمق دال منجر می‌گردد [6, 10]. چندین عامل نظیر زمان شبانه‌روز، زمان سال (ماه یا فصل)، عرض جغرافیایی و میزان ابری بودن هوا و امثال آن وجود دارند که در جذب تشعشعات خورشیدی در سطح یک دال بتنی مشخص مؤثرند [11, 12].

تشعشع خورشیدی دارای مؤلفه‌های مستقیم و غیرمستقیم است. مؤلفه مستقیم، تشعشع متغیر و لحظه‌ای است که عبارت است از تشعشعی که مستقیماً به سطح دال می‌رسد. در حالی که تابش غیرمستقیم به تشعشعاتی اطلاق می‌شود که از بازتابش نور به واسطه اجسام محیط اطراف دال حاصل می‌شود. بنابر این کل تشعشع خورشیدی که به سطح دال بتنی می‌رسد مجموع انتشارات مستقیم و غیر مستقیم بوده و توسط برانکو^۹ و همکارانش به صورت زیر معرفی گردیده است [6]:

$$q_s'' = \alpha \left[I_d \sin \theta + I_t \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right) \right] \quad (13)$$

q_s'' : تشعشع خورشیدی، برحسب W/m2،

α : قابلیت جذب حرارت سطحی بتن (که براساس مرجع [11] برابر ۰/۶ می‌باشد)،

I_d : تشعشع مستقیم خورشیدی، برحسب W/m2،

I_t : تشعشع غیرمستقیم خورشیدی، برحسب W/m2،

θ : زاویه لحظه‌ای تشعشع خورشیدی نسبت به سطح دال، بر حسب درجه، و

γ : شیب سطح دال، بر حسب درجه.

میزان دریافت تشعشع خورشیدی توسط سطح دال به زاویه لحظه‌ای تابش خورشید نسبت به آن و نیز شیب دال بتنی بستگی دارد. زاویه لحظه‌ای تشعشعات خورشیدی را می‌توان با روشی که توسط زیه^۹ و همکارانش در سال ۱۹۸۹ ارائه شده تعیین نمود. مقدار تابش غیرمستقیم خورشید نیز از ۱۰٪ اکل تابش خورشید در یک روز صاف تا نزدیک به ۱۰۰٪ اکل تابش در یک روز کاملاً خورشیدی تغییر می‌کند، و از آنجا که شب هیچ گونه پرتوهای خورشیدی وجود ندارد، جذب تشعشعات خورشیدی توسط دال نیز وجود نخواهد داشت.



۲-۴-۳- شار گرمایی ناشی از تبخیر
 در نظرگیری شار گرمایی ناشی از تبخیر به عنوان شرایط مرزی انتقال حرارت در ناحیه مشخصی روی سطح دال برای محاسبه دقیق تأثیرات رطوبت بر وضعیت دما روی سطح یک روسازی بتنی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تاکنون تعداد بسیار اندکی مدل پیش‌بینی دما ابداع شده است که تأثیرات تبخیر را نیز به عنوان شرایط مرزی لحاظ کرده‌اند [13]. تلاش‌های فراوان و چشم‌گیری توسط محققان برای ابداع مدل‌هایی که بتوانند به راحتی با اغماض از تأثیر شار گرمایی ناشی از تبخیر به عنوان شرایط مرزی به پیش‌بینی بپردازند، صورت گرفته است [3, 14]. شار حرارتی ناشی از تبخیر را می‌توان به کمک رابطه زیر محاسبه نمود:

$$q_e'' = E H_v \quad (14)$$

E: شدت تبخیر، برحسب W/m³ یا Kg/m²/h
 H_v: گرمای تبخیر آب که توسط رابطه، برحسب Cal/gr محاسبه می‌شود [15]. شایان ذکر است که می‌توان این رابطه را بر حسب متر نیز به صورت (3/564T_s - 427) بیان نمود.

۴- رطوبت بتن

۴-۱- پخش شدن رطوبت
 پخش شدن رطوبت در حجم بتن را می‌توان با معادله (۱۵) توصیف نمود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \text{grad}(RH)) + \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \quad (15)$$

θ: حجم آب موجود در بتن،
 D: سرعت پخش شدن رطوبت بر حسب cm²/sec،
 θ_s: حجم آبی که در فرایند هیدراتاسیون شرکت کرده، و
 RH: رطوبت نسبی.

با استفاده از قانون زنجیری، معادله (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial RH}{\partial t} = \frac{\partial RH}{\partial \theta} \text{div}(D \cdot \text{grad}(RH)) \quad (16)$$

که به ظرفیت رطوبت اطلاق می‌گردد که در بخش‌های بعدی بررسی خواهد شد. با توجه به تعریف هیدراتاسیون، می‌توان آن را به صورت نسبتی از حجم مقدار آب موجود در فرآیند هیدراتاسیون به تمام آب مورد نیاز برای تکمیل هیدراتاسیون (θ_u) بیان نمود:

$$\frac{\partial RH}{\partial t} = \frac{\partial RH}{\partial \theta} \text{div}(D \cdot \text{grad}(RH)) + \frac{\partial RH}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_s}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (17)$$

با توجه به رابطه (۱۷)، می‌توان رابطه (۱۶) را به صورت ملموس‌تر و قابل فهم‌تری در قالب رابطه (۱۸) ارائه کرد:

$$\alpha = \frac{\theta_s}{\theta_u} \quad (18)$$


که مقدار $\frac{\partial \theta_s}{\partial \alpha}$ برای هر مخلوط مشخصی از بتن یک مقدار ثابت و معینی است. $\frac{\partial \theta_s}{\partial \alpha}$ نیز در معادله (۵) محاسبه گردیده است. شرایط مرزی انتقال رطوبت در بتن توسط معادله (۱۹) بیان می‌شود [16]:

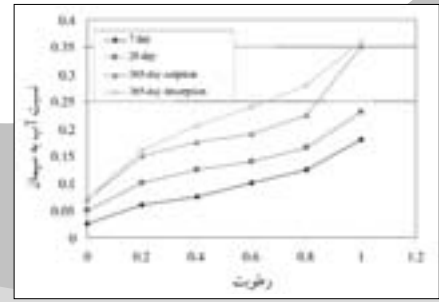
$$J = B \ln(RH_s - RH_a) \quad (19)$$

که B قابلیت تشعشع سطح بتن، RH_s رطوبت نسبی سطح و RH_a نیز رطوبت نسبی محیط اطراف دال می‌باشد.

۲-۴- ظرفیت رطوبتی

رابطه بین رطوبت و آب موجود در حجم بتن در دما و درجه هیدراتاسیون ثابت توسط قانون جذب و دفع هم‌دهاها توصیف می‌شود [16]. بدیهی است که نسبت رطوبت اولیه بتن و مقدار اندازه‌گیری شده آن در طول عمل آمدن بتن به عنوان تابعی از سن روسازی تغییر خواهد کرد. میزان وابستگی قابلیت تبخیر آب بتن به رطوبت موجود در بتن (که خود تابعی از دما است) تابعی از ضریب تخلخل ساختار متخلخل خمیر سیمان است که به طور تجربی در قالب قانون دفع یا جذب هم‌دهاها معرفی شده و در شکل (۳) نیز به نمایش در آمده است. شایان ذکر است که هم‌دهایی برای جذب مقوله‌ای متفاوت از هم‌دهایی برای دفع است. احتمالاً این ویژگی به علت حالت‌های گوناگون برقراری تعادل آب منفذی و اثر انرژی سطح بر آن ایجاد می‌شود و وقتی که بتن در حالت جذب و دفع است، موجب اعمال نیرو در جهات مختلف می‌گردد. در سال ۱۹۸۸ یک تحقیق توسط پاروت^{۱۱} انجام شد که به اهمیت ضریب تخلخل با توجه به موقعیت هم‌دهای در حال دفع و یا جذب در داخل بتن اشاره داشته است. نتایج نشان دادند که از دست رفتن میزان بیشتری از رطوبت بتن در حال خشک شدن در نزدیکی سطح روبرو آن که به احتمال زیاد دارای تخلخل بیشتری نسبت به سایر

نقاط حجم بتن نیز است، اتفاق می‌افتد. بنابراین می‌توان تعبیر کرد که حجم بیشتری از حفره‌های درشت نزدیک به صفحه روبرو رطوبت بتنی است و بالتجربه رابطه بین کاهش وزن و رطوبت نسبی بتن با فاصله از سطح روسازی تغییر خواهد کرد. با توجه به مطالب مذکور، به نظر می‌رسد عملکرد و رفتار روسازی‌های بتنی متأثر از تخلخل سطح روسازی بتن است. نکته دیگری که لازم به ذکر می‌نماید این است که فرآیند دفع هم‌دهاها حاصل از فرآیند هیدراتاسیون یک دال بتنی در حال سخت شدن را، در هر زمانی از فرآیند، نه تنها تابعی از درجه هیدراتاسیون بلکه تابعی از میزان تخلخل نیز باید دانست. در یک تخلخل مشخص می‌توان دفع هم‌دها را به صورت یک معادله دیفرانسیل بیان نمود [16].

$$dH = k dw \quad \text{که } dH \text{ تغییرات رطوبت نسبی، } dw \text{ تغییرات حجم آب بتن و } k \text{ ظرفیت رطوبتی است. در سال ۱۹۹۴ زی}^{\text{۱۱}} \text{، بازانت و زینینگ}^{\text{۱۲}} \text{ مدلی برای توصیف ظرفیت رطوبت مصالح با قابلیت سیمانی (ایجاد چسبندگی) ارائه دادند [17].}$$


شکل (۳): نمایش فرآیند دفع هم‌دها [11]

۵- مدل‌سازی مسئله با استفاده از روش اجزای محدود

روش اجزای محدود یک روش بسیار توانا و کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل براساس اصول تغییرات می‌باشد. از آنجایی که توزیع دما و رطوبت در حجم بتن کاملاً به عمق وابسته است، می‌توان آن را به صورت یک مسئله یک بعدی ساده کرد.

۵-۱- مشتق تغییرات با استفاده از روش اجزای محدود

اگر معادله (۶) را با استفاده از اصل تغییرات و به صورت یک معادله یک بعدی تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\int \left[-K \frac{dT}{dx} \delta \left(\frac{dT}{dx} \right) + Q - \rho c T \right] \delta T dx = 0 \quad (20)$$

انتگرال‌گیری جزء به جزء معادله (۲۰) منجر به معادله (۲۱) می‌شود:

نقاط حجم بتن نیز است، اتفاق می‌افتد. بنابراین می‌توان تعبیر کرد که حجم بیشتری از حفره‌های درشت نزدیک به صفحه روبرو رطوبت بتنی است و بالتجربه رابطه بین کاهش وزن و رطوبت نسبی بتن با فاصله از سطح روسازی تغییر خواهد کرد. با توجه به مطالب مذکور، به نظر می‌رسد عملکرد و رفتار روسازی‌های بتنی متأثر از تخلخل سطح روسازی بتن است. نکته دیگری که لازم به ذکر می‌نماید این است که فرآیند دفع هم‌دهاها حاصل از فرآیند هیدراتاسیون یک دال بتنی در حال سخت شدن را، در هر زمانی از فرآیند، نه تنها تابعی از درجه هیدراتاسیون بلکه تابعی از میزان تخلخل نیز باید دانست. در یک تخلخل مشخص می‌توان دفع هم‌دها را به صورت یک معادله دیفرانسیل بیان نمود [16].

دما (T) را می‌توان از رابطه تقریبی زیر به دست آورد:

$$T = T_i^m N_i \quad (22)$$

که N_i تابع تقریب و T^m دمای نقطه‌ای بتن در هر گام زمانی m می‌باشد.

تقریب دما (T) نسبت به بُعد زمان در فرمول‌بندی اختلافات محدود به صورت پیش فرض پذیرفته شده است. بنابراین، می‌توان معادله (۲۱) را به صورت زیر بازنویسی نمود. (۲۳)

تقریب دما (T) نسبت به بُعد زمان در فرمول‌بندی اختلافات محدود به صورت پیش فرض پذیرفته شده است. بنابراین، می‌توان معادله (۲۱) را به صورت زیر بازنویسی نمود. (۲۳)

$$\int [k N_{ix} N_{jx}] dx T_j^m + \frac{[\rho c N_i N_j dx T_j^{m+1}] - [\rho c N_i N_j dx T_j^m]}{\Delta t} = \int Q N_j dx$$

که N_{ix} همان مشتق اول N_i نسبت به x و Δ_i بازه زمانی است. توجه به این نکته ضروری است که در رابطه بالا مقادیر ثابتی در دامنه انتگرال‌گیری نیستند. برای جمله مربوط به شرایط مرزی، تمام حرارت خارجی در نقاط مرزی باید به طرف راست معادله (۲۳) و با رعایت شماره نقاط اضافه شوند.

برای به دست آوردن فرمول اجزای محدود برای انتشار بخار، بایدست همین فرآیند باید دوباره تکرار شود. فرمول‌بندی تغییرات در معادله (۱۸) به صورت یک بعدی، معادله (۲۴) را نتیجه می‌دهد:

$$\int \left[\frac{\partial RH}{\partial \theta} \cdot \frac{d}{dx} \left(D \frac{\partial RH}{\partial x} \right) + \frac{\partial RH}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_s}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial RH}{\partial t} \right] \delta RH dx = 0 \quad (24)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از معادله (۲۴) خواهیم داشت: (۲۵)

$$\int \left[-\frac{\partial RH}{\partial \theta} D \frac{\partial RH}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial RH}{\partial x} \right) - \frac{\partial RH}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_s}{\partial \alpha} \delta RH + \frac{\partial RH}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_s}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta RH - \frac{\partial RH}{\partial t} \delta RH \right] dx + \frac{\partial RH}{\partial \theta} D \frac{\partial RH}{\partial x} \delta RH \Big|_{x=a}^{x=b} = 0$$